# 回路システム学第二（12）

2019.7.8

担当教官　山尾　泰

# 先週の学習項目

1. リアクタンス回路網の設計(2)

- 連分数による梯子型回路の表現(1)

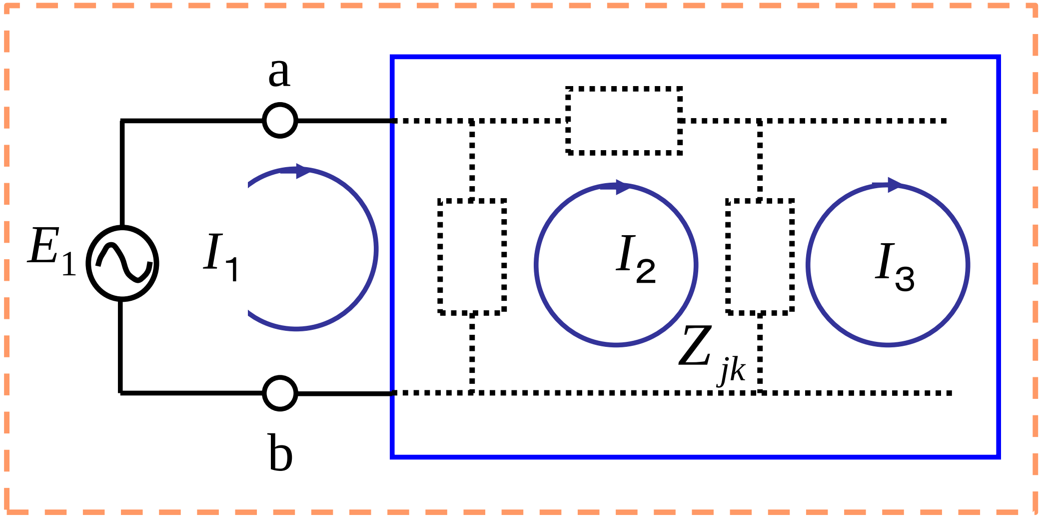
  $s$関数の最高次数から分子を分母で割る方法

- 連分数による梯子型回路の表現(2)

  $s$関数の最低次数から分子を分母で割る方法

# R-L、R-C回路網の設計

# 回路網の入力インピーダンスの一般化(第9回スライド)




## 閉路解析法（基礎電気回路）

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & & \\ & & & \\ Z_{n1} & & & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

インピーダンス行列
（正方行列）

a, b端子から右側を見たインピーダンス $Z$ は

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} E_1 \qquad \therefore \qquad Z = \frac{E_1}{I_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

（クラーメルの解法）

$\Delta$ : インピーダンス行列の行列式の値

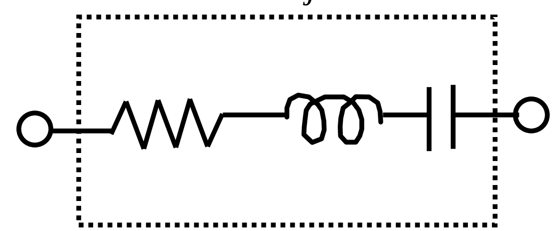
$\Delta_{11}$ : インピーダンス行列の第1行と第1列を除いた小行列式の値

# RLC回路網関数の基本的性質

$$Z=\frac{E_1}{I_1}=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}=\frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & & & \\ Z_{n1} & Z_{n2} & & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}$$

RLC回路

$Z_{jk}$



$$Z_{jk}=sL_{jk}+R_{jk}+\frac{1}{sC_{jk}}$$

$$=\frac{1}{s}\left(\underbrace{L_{jk}s^2+R_{jk}s}_{\text{R-Lのみ}}+\frac{1}{C_{jk}}\right)$$

$$Z(s)=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}=\frac{(a_0+a_1s+\cdots+a_{2n}s^{2n})/s^n}{(b_1+b_2s+\cdots+b_{2n-1}s^{2n-2})/s^{n-1}}$$

最高次数: $n$

最高次数: $n$-1

# リアクタンスのみの回路網関数(1)

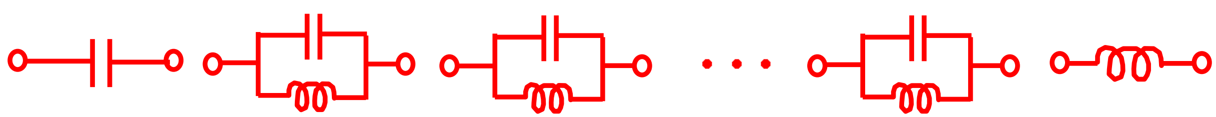
リアクタンス関数の零点と極は周波数軸上で交互に配置される

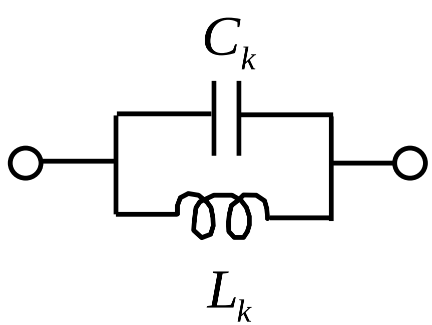
$$Z(s)=\frac{H\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)\cdots\left(s^2+\omega_{2n-1}^2\right)}{s\left(s^2+\omega_2^2\right)\left(s^2+\omega_4^2\right)\cdots\left(s^2+\omega_{2n-2}^2\right)}$$

ただし　$H>0$

$$0\le\omega_1<\omega_2<\omega_3<\omega_4\cdots<\infty$$

$$=s\left(\underline{\frac{A_0}{s^2}+\frac{A_2}{s^2+\omega_2^2}+\frac{A_4}{s^2+\omega_4^2}+\cdots+\frac{A_{2n-2}}{s^2+\omega_{2n-2}^2}+A_\infty}\right)$$

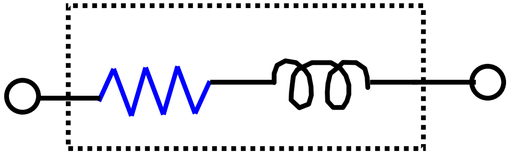


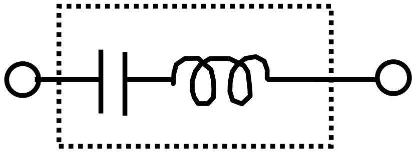



$$Z_k=\frac{\dfrac{s}{C_k}}{s^2+\dfrac{1}{L_kC_k}}=\frac{A_k\,s}{s^2+\omega_k^2}$$

上記の直列接続回路により実現できる

# R-L回路網とL-Cリアクタンス回路網の類似性





$$Z_k = sL_k + R_k$$

$$= \sqrt{s}\left(\sqrt{s}L_k + \frac{R_k}{\sqrt{s}}\right)$$

$$Z_k(s) = \sqrt{s}Z_{kLC}\left(\sqrt{s}\right)$$

$$Z_{kLC} = sL_k + \frac{1}{sC_k}$$

$s \to \sqrt{s}$ , $\frac{1}{C_k} = R_k$ に置き換え、

$Z$ に$\sqrt{s}$ を掛けた形

したがってR-L回路網のインピーダンス関数は、L-C回路網関数から

$$Z(s) = \frac{H(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}{(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}$$

$0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{2n-2} < s_{2n-1} < \infty$ ➡ 零点、極は全て負の実数

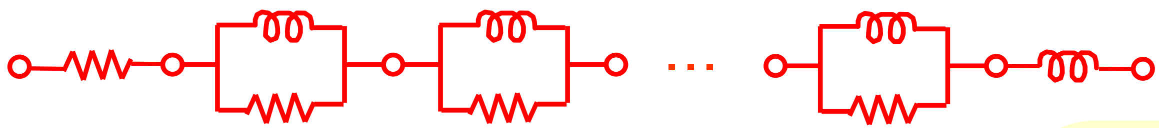
$Z(j\omega)$は$\omega=0$と$\omega=\infty$を除いて、0にも∞にもならない。

# R-L並列回路の直列接続による構成

$$Z(s) = H\frac{(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}{(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}$$

次数が1次高い

$$= s\left(\frac{A_0}{s} + \frac{A_2}{s+s_2} + \frac{A_4}{s+s_4} + \cdots + \frac{A_{2n-2}}{s+s_{2n-2}} + A_\infty\right)$$

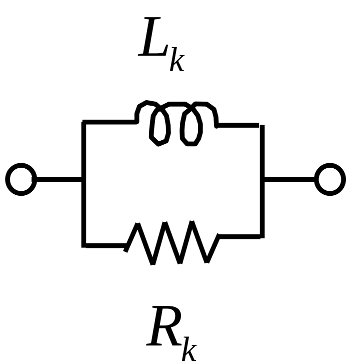


留数定理で係数決定

$$A_k = \lim_{s\to -s_k}\frac{Z(s)}{s}(s+s_k)$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0}\frac{Z(s)}{s}s$$

$$A_\infty = \lim_{s\to\infty}\frac{Z(s)}{s} = H$$




$$Z_k = \frac{sR_kL_k}{R_k + sL_k} = \frac{sR_k}{s + \dfrac{R_k}{L_k}}$$

$$\therefore\ A_k = R_k,\quad s_k = \frac{R_k}{L_k}$$

# R-L直列回路の並列接続による構成

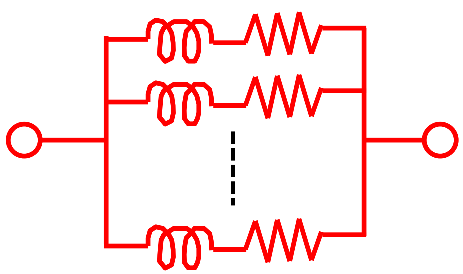
$$Y(s)=\frac{1}{Z(s)}=\frac{(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}{H(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}$$

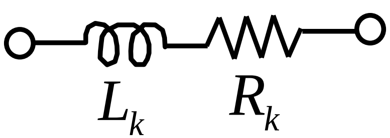
1次高い

$$=\frac{B_1}{s+s_1}+\frac{B_3}{s+s_3}+\cdots+\frac{B_{2n-1}}{s+s_{2n-1}}$$

留数定理
で係数決定

$$B_k=\lim_{s\to -s_k} Y(s)(s+s_k)$$





$$Y_k=\frac{1}{sL_k+R_k}=\frac{\frac{1}{L_k}}{s+\frac{R_k}{L_k}}$$

$$\boxed{L_k=\frac{1}{B_k} \qquad R_k=L_k s_k}$$

# R-L梯子型回路の連分数による設計(1)

$$Z(s) = H\frac{(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}{(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}$$

次数が1次高い

$$= \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

商

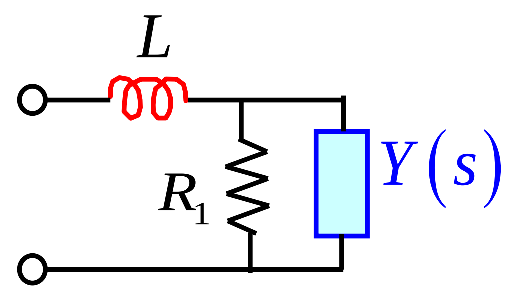
剰余は同じ形式で分子の次数減

最高次数の項について分子を分母で割ると

$$Z(s) = \frac{a_n}{b_{n-1}}s + \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

$$c_k = a_k - b_k\frac{a_n}{b_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n}{b_{n-1}}s + \cfrac{1}{\cfrac{b_{n-1}}{c_{n-1}} + \cfrac{d_{n-2}s^{n-2}\cdots + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}}$$



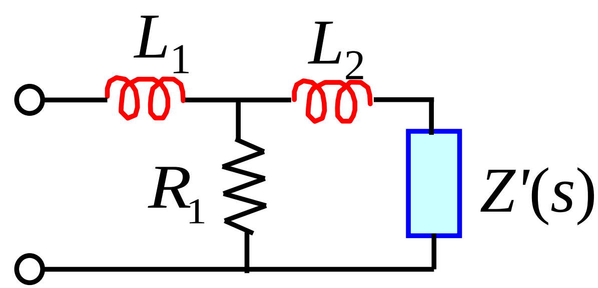

$sL$ $\quad \frac{1}{R_1}$ $\quad Y(s)$

分子の最高次数の項がさらに減った

# R-L梯子型回路の連分数による設計（1）

$$Z(s)=\underbrace{\frac{a_n}{b_{n-1}}}_{sL_1}s+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}}_{\frac{1}{R_1}}+\cfrac{1}{\cfrac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0}{d_{n-2}s^{n-2}\cdots+d_2s^2+d_1s+d_0}}}$$

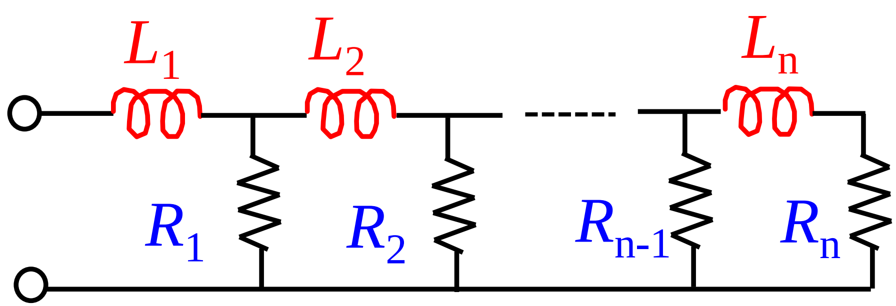
$$=\underbrace{\frac{a_n}{b_{n-1}}}_{sL_1}s+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}}_{\frac{1}{R_1}}+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{c_{n-1}}{d_{n-2}}s}_{sL_2}+\underbrace{\frac{e_{n-2}s^{n-2}+\cdots+e_2s^2+e_1s+e_0}{d_{n-2}s^{n-2}\cdots+d_2s^2+d_1s+d_0}}_{Z'(s)}}}$$



# 連分数による梯子型回路の表現(1)

$$Z(s)=\underbrace{\frac{a_n}{b_{n-1}}s}_{sL_1}+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}}_{\frac{1}{R_1}}+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{c_{n-1}}{d_{n-2}}s}_{sL_2}+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{d_{n-2}}{e_{n-2}}}_{\frac{1}{R_2}}+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{e_{n-2}}{f_{n-3}}s}_{sL_3}+\cdots}}}}$$

連分数形式

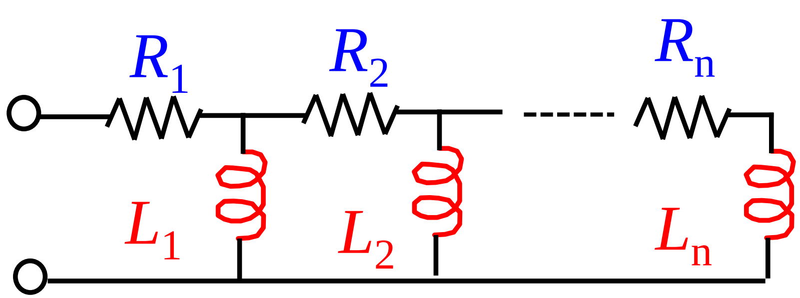


# 連分数による梯子型回路の表現(2)

一方、最低次数の項から商を求めて連分数にした場合には

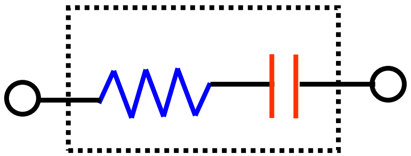
$$Z(s)=\frac{a_0}{b_0}+\cfrac{1}{\cfrac{b_0}{c_1 s}+\cfrac{1}{\cfrac{c_1}{d_1}+\cfrac{1}{\cfrac{d_1}{e_2 s}+\cfrac{1}{\cfrac{e_2}{f_2}+\cdots}}}}$$

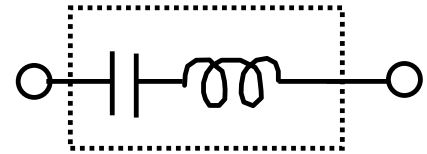
$R_1$ $\quad \frac{1}{sL_1}$ $\quad R_2$ $\quad \frac{1}{sL_2}$ $\quad R_3$




最高次数から商を求めて項を減らした場合と異なる梯子型回路形式（LとRが入替え）だが、同じ$Z(s)$を有し等価である。

# R-C回路網とL-Cリアクタンス回路網の類似性





$$Z_k = R_k + \frac{1}{sC_k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\sqrt{s}R_k + \frac{1}{\sqrt{s}C_k}\right)$$

$$Z_k(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} Z_{kLC}\left(\sqrt{s}\right)$$

$$Z_{kLC} = sL_k + \frac{1}{sC_k}$$

$s \to \sqrt{s}$ , $L_k = R_k$ に置き換え、

$Z$ に$(1/\sqrt{s})$ を掛けた形

したがってR-C回路網のインピーダンス関数は、L-C回路網関数から

$$Z(s) = \frac{H(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}{s(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}$$

R-L回路網と異なり次数は等しい

$0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{2n-2} < s_{2n-1} < \infty$ ➡ 零点、極は全て負の実数

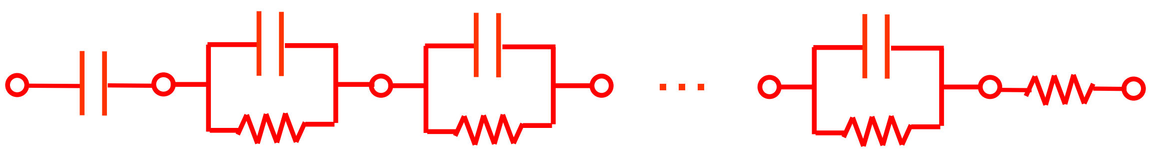
$Z(j\omega)$は$\omega=0$と$\omega=\infty$を除いて、0にも∞にもならない。

# R-C並列回路の直列接続による構成

$$Z(s)=\frac{H(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}{s(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}$$

次数は等しい

$$=\frac{A_0}{s}+\frac{A_2}{s+s_2}+\frac{A_4}{s+s_4}+\cdots+\frac{A_{2n-2}}{s+s_{2n-2}}+A_\infty$$



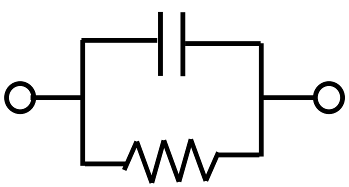
留数定理で係数決定

$$A_k=\lim_{s\to -s_k} Z(s)(s+s_k)$$

$$A_0=\lim_{s\to 0} Z(s)s$$

$$A_\infty=\lim_{s\to\infty} Z(s)=H$$

$C_\mathrm{k}$



$R_k$

$$Z_k=\frac{1}{sC_k+\frac{1}{R_k}}=\frac{\frac{1}{C_k}}{s+\frac{1}{R_kC_k}}$$

$$\boxed{\therefore\quad A_k=\frac{1}{C_k},\quad s_k=\frac{1}{R_kC_k}}$$

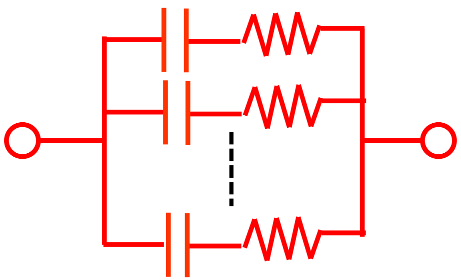
# R-C直列回路の並列接続による構成

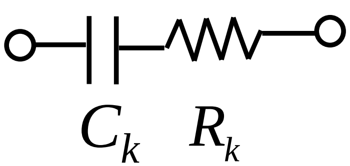
$$Y(s)=\frac{1}{Z(s)}=\frac{s(s+s_2)(s+s_4)\cdots(s+s_{2n-2})}{H(s+s_1)(s+s_3)\cdots(s+s_{2n-1})}$$

$$=\frac{B_1 s}{s+s_1}+\frac{B_3 s}{s+s_3}+\cdots+\frac{B_{2n-1}s}{s+s_{2n-1}}$$

留数定理で係数決定

$$B_k=\lim_{s\to -s_k}\frac{(s+s_k)}{s}Y(s)$$






$$Y_k=\frac{1}{\dfrac{1}{sC_k}+R_k}=\frac{\dfrac{1}{R_k}s}{s+\dfrac{1}{R_kC_k}}$$

$$\therefore\ B_k=\frac{1}{R_k},\quad s_k=\frac{1}{R_kC_k}$$

# 第4回レポート　梯子型リアクタンス回路の設計

図3の梯子型回路が以下の特性となるように素子値を設計せよ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 共振周波数（零点） | $\omega_1 = 1000$ (rad/sec) | | $\omega_3 = 5000$ (rad/sec) |
| 反共振周波数（極） | | $\omega_2 = 2000$ (rad/sec) | |

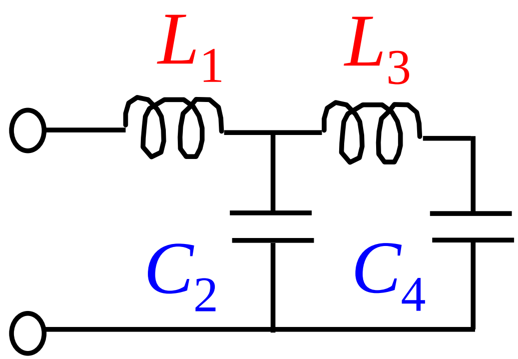



図3

ただし　$Z(s) = \dfrac{H\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)}{s\left(s^2+\omega_2^2\right)}$

において　$H$=0.1　とする。

提出用紙は配布した解答用紙またはA4用紙（縦）を使用し、学籍番号と氏名を各ページの上部に必ず記入すること。

提出日；次回の授業（7月22日）の冒頭で提出すること。